Année 2002

CONCOURS D'ADMISSION
A
L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS MP

PREMIERE EPREUVE
DE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

L'attention des candidats est attirée sur le fait
Que la notation tiendra compte du soin et de la
Rigueur apportés dans le travail.

Nota : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

T.S.V.P.

Le but de ce problème est d'étudier des applications du type $g: z \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{z+t}\,dt$ où f est une fonction possédant certaines propriétés et z est élément de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.

On notera Ω l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. On rappelle que l'espace des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles est un espace vectoriel normé noté $L_c^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

On rappelle aussi que, étant donné une fonction f à valeurs réelles ou complexes continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$, il peut arriver que f ne soit pas intégrable sur cet intervalle mais que la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ admette une limite au point b.

Cette limite est encore notée $x \longmapsto \int_a^b f(t)dt$.

I Etude de quelques cas particuliers

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$.
   (a) Montrer que $\forall\, z \in \Omega$, $g(z) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{z+t}dt$ existe bien.
   (b) Montrer que $\forall\, z \in \Omega$, $g(z) = \int_0^1 \frac{2}{1+(z-1)t^2}dt$.
   (c) Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 1.
   Quel est le rayon de convergence de cette série entière?
   (d) Pour les valeurs de z réelles appartenant à l'intérieur du disque de convergence, exprimer la somme de la série entière à l'aide de fonctions usuelles.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.
   (a) Etudier à nouveau l'existence de g.
   (b) Déterminer $g(x)$ pour x réel positif.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = exp(-\lambda t)$ où λ est un paramètre réel.
   (a) Etudier à nouveau l'existence de g en fonction de λ.
   (b) Trouver la limite de $g(x)$ pour x réel tendant vers $+\infty$.
   (c) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y'(x) - \lambda y(x) = -\frac{1}{x}$.
   (d) En déduire que pour tout x réel strictement positif,

$$g(x) = exp(\lambda x) \int_x^{+\infty} \frac{exp(-\lambda t)}{t}dt$$

II Etude du cas $f \in L_c^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

Dans toute cette partie, les fonctions f considérées seront toutes éléments de $L_c^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

4. Pour $f \in L_c^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et x réel strictement positif, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Montrer que F est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et que F se prolonge par continuité en 0.

5. Montrer que pour toute fonction f élément de $L_c^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$, g est bien définie.

6.

(a) Montrer que g est une fonction continue sur Ω.

(b) Montrer que g a une limite nulle quand $|z| \longrightarrow +\infty$.

(c) Montrer que $\forall\, z \in \Omega$, $g(z) = \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(z+t)^2}dt$.

(d) Soit α, $0< \alpha < \pi$. Montrer qu'il existe $k_\alpha > 0$ tel que $\forall\, z \in \Omega$, tel que $z = r\exp(i\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [\alpha,\pi-\alpha]$, on ait

$$|g(z)| \leq \frac{K_\alpha}{|z|}$$

(e) Montrer que la fonction d'une variable réelle $x \longmapsto g(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. A-t-on g élément de $L_c^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$?

III Etude sur un nouvel espace

On considère l'ensemble F des fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telles que f soit intégrable sur $]0,1]$ et $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ existe.

8. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel contenant $L_c^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

9. Déterminer une fonction appartenant à F mais pas à $L_c^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

10. Les fonctions de F à valeurs positives ou nulles sont-elles nécessairement bornées sur $[1,+\infty[$?
11. Montrer que pour toute fonction h continue sur $[1,+\infty[$ à valeurs réelles et pour tout couple $(z_1,z_2) \in \Omega^2$, l'existence de $\int_1^{+\infty} h(t)dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} h(t)\frac{t+z_1}{t+z_2}dt$.
12. Montrer que $\forall f \in F$, $\forall z \in \Omega$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+z}dt$ existe.

On considère dans la suite l'application T définie pour tout f élément de F par

$$\forall z \in \Omega,\ T(f)(z) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+z}dt$$

13. Soit $f \in F$, $g = T(f)$ et $z \in \Omega$.
    (a) Etablir l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+z)^2}dt$.
    (b) Etablir la continuité de g sur Ω.
14. Soit $z = -x + iy \in \Omega$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et $y \in \mathbb{R}_+^*$.
    (a) Trouver la limite de $\int_{2x}^{+\infty} (\frac{1}{z+t} - \frac{1}{\bar{z}+t})dt$ quand y tend vers 0.
    (b) Même question pour $\int_{2x}^{+\infty} f(t)(\frac{1}{z+t} - \frac{1}{\bar{z}+t})dt$ et pour

$$\int_0^{2x} (f(t)-f(x))(\frac{1}{z+t} - \frac{1}{\bar{z}+t})dt.$$

    (c) Déduire de ce qui précède la limite de $g(-x+iy)-g(-x-iy)$ quand y tend vers 0.
15. L'application T définie sur F par $T(f) = g$ est-elle injective?